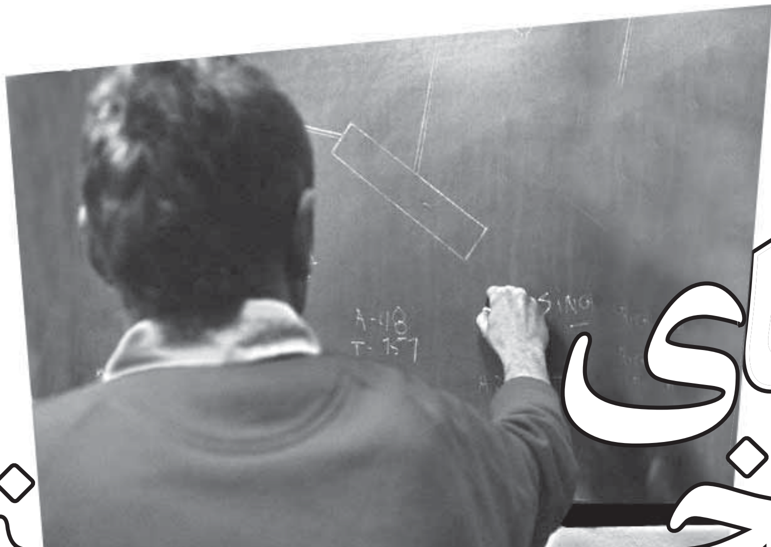
محرم نژاد ایردموسی*



پای تخته

مقدمه

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل‌نامهٔ برهان است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، تعدادی مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. همچنین، از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید.

شما می‌توانید مسائل و راه‌حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا خواهد شد.

همچنین می‌توانید با مراجعه به وبلاگ مجله که نشانی آن در صفحه فهرست مجله موجود است به مسائل شماره‌های آینده دسترسی پیدا کنید.

بخش اول:

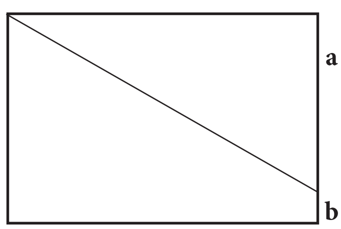
مسئله‌ها

۱۰۱. اعداد سه رقمی $\overline{ab۴}$ و $\overline{۴ab}$ در تساوی زیر صدق می‌کنند. عدد دو رقمی $\overline{ab}$ را بیابید.

$$۴۰۰-\overline{ab۴}=\overline{۴ab}-۴۰۰$$

۱۰۲. عدد ۲۰۱۳ دارای این خاصیت است که ارقام آن چهار رقم متوالی هستند. قبل از سال ۲۰۱۳، نزدیک‌ترین سالی که این خاصیت را داشته، چه سالی بوده است؟

۱۰۳. با یک خط، مستطیلی را به دو بخش افراز کرده‌ایم، به‌طوری که a>b و نسبت مساحت دو بخش ۸ به ۳ است. اگر a+b=۱۳۲، مقدار a را بیابید.



۱۰۴. از دنبالهٔ اعداد طبیعی، مضارب ۷ را حذف کرده‌ایم. در دنبالهٔ جدید، جمله nام را بیابید. برای مثال، جملهٔ هفتم این دنباله ۸ و جملهٔ پانزدهم ۱۷ است.

۱۰۵. چند مثلث متساوی‌الساقین وجود دارد که متساوی‌الاضلاع نیست و طول ساق‌های آن عددی طبیعی، کوچک‌تر یا مساوی n است؟ $(n\in N)$

۱۰۶. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین PQRS دارای دو قاعدهٔ PQ=۶ و RS=۱۰ است. فاصلهٔ دو قاعده ۱۲ است. شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که ذوزنقه را می‌پوشاند، چه‌قدر است؟

۱۰۷. عدد طبیعی N را k- ویژه می‌نامیم، هرگاه مجموع ارقام N به‌علاوهٔ k برابر حاصل‌ضرب ارقام N، برابر با خود عدد N باشد. برای مثال، ۲۹، ۱- ویژه است، چون ۲۹=۹×۲+۹+۲.

الف) همهٔ اعداد دو رقمی ۱- ویژه را پیدا کنید.

ب) ثابت کنید (به روش جبری) که رقم اول همهٔ جواب‌های (الف) یکسان است.

ج) نشان دهید هیچ عدد دو رقمی وجود ندارد که ۲- ویژه باشد.

د) برای چه مقادیری از k، عدد دو رقمی k- ویژه وجود دارد؟

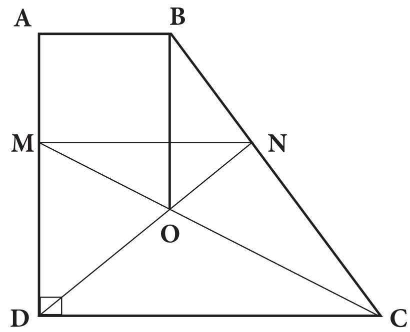
۱۰۸. ثابت کنید سه عدد حقیقی گنگ نمی‌توان یافت که مجموع هر دوتای آن‌ها گویا باشد.

۱۰۹. چهـار عدد حقیقی a، b، c و d مفروض‌اند. ثابت کنید حداکثر ۴ زوج مانـنـد {x,y} میـان آن‌هـا می‌توان یافـت، به‌طوری که: $1<|x-y|<2$. برای ۴ زوج یک مثال از چهار عدد حقیقی پیدا کنید.

۱۱۰. (ارائه شده توسط هوشنگ شرقی از اعضای هیئت تحریریه مجله)

در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD، M و N روی AD و BC چنان قرار دارند که MN موازی قاعده‌های ذوزنقه است. اگر O نقطهٔ برخورد DN و CM باشد و BO||AD، ثابت کنید:

$$\frac{AD}{AM}=\left(\frac{CD}{MN}\right)^2$$



بخش دوم:

راه‌حل‌ها

۴۱. همهٔ زوج اعداد حقیقی (a,b) را بیابید، به‌طوری که: $a+b=1$ و $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^4+b^4$.

● **حـل:** بـه کمـک اتحـاد $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ و بـا فرض $a+b=1$، داریـم: $(a^2+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+b^4$. پس از سـاده کردن به تساوی $ab(a-b)^2=0$ می‌رسیم. در نتیجه $a=0$، یا $b=0$ و یا $a=b$. در هر یک از این سـه حالت یک جواب به‌دست می‌آید. جواب‌ها عبارت‌اند از: $(a,b)=(0,1)$ یا $(1,0)$ یا $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

۴۲. مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC از متوازی‌الاضلاع ABCD روی قطر BD واقع است. ثابت کنید ABCD لوزی است.

● **حـل:** مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC را O و پای عمودهای وارد بـر اضلاع AB و BC از نقطهٔ O را به‌ترتیب H_1 و H_2 بنامید. چون $OH_1=OH_2$ و $BH_1=BH_2$، دو مثلـث قائم‌الزاویه OH_1B و OH_2B همنهشـتند و در نتیجه: $\angle ABD=\angle DBC$. از طرف دیگر، امتداد BO از D می‌گـذرد و در نتیجـه: $\angle ABD=\angle BDC$. در نتیجـه: $\angle DBC=\angle BDC$ که نشان می‌دهد مثلث DBC متساوی‌الساقین است. بنابراین: DC=CB و در نتیجه ABCD یک لوزی است.

۴۳. قطرهـای A_1A_3، A_2A_4، A_3A_5، A_4A_6، A_5A_1 و A_6A_2 از شـش‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$، یکدیگر را قطع می‌کنند تا شش‌ضلعی منتظم $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ حاصل شود. ثابت کنید $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ نیز منتظم است.

● **حـل:** فرض کنید امتداد B_1B_2 بـه رأس A_1 و امتداد B_1B_6 به A_2 رسیده باشد. در دو مثلث حاصل، دو زاویهٔ $A_1B_1B_6$ و $A_2B_1B_2$ برابر 60° هستند. با تکرار همین استدلال در رئوس B_i نتیجه خواهد شد که مثلث‌های $A_1B_1B_6$، $A_2B_1B_2$، ... و $A_6B_5B_6$ متسـاوی‌الاضلاع و همنهشت هستند. در نتیجه مثلث‌های $A_1A_2B_1$، $A_2A_3B_2$، ... و $A_6A_1B_6$ به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین با هم همنهشـت خواهند شـد. در نتیجه اضلاع شش‌ضلعی $A_1A_2...A_6$ با هم برابر هستند. چـون زاویه‌های مجاور به سـاق‌ها در مثلث‌هـای $A_1A_2B_1$، ... و $A_6A_1B_6$ ۳۰ درجه هستند، در نتیجه زوایای شش‌ضلعی $A_1A_2...A_6$ برابر ۱۲۰ درجه هستند و حکم ثابت می‌شود.

۴۴. در مثلـث ABC بـا طـول اضـلاع $|BC|=a$، $|CA|=b$ و $|AB|=c$، ثابـت کنیـد: $\angle ABC=60^\circ$ اگر و تنهـا اگر: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$.

● **حـل:** تسـاوی داده شـده معادل اسـت با تسـاوی $b^2=a^2+c^2-ac$. از طـرف دیگـر، قضیـه کسـینوس‌ها بیـان می‌کنـد کـه: $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos B$.

در نتیجـه اگـر $\angle ABC=60^\circ$، آن‌گاه: $\cos B=\frac{1}{2}$ که تسـاوی $b^2=a^2+c^2-ac$ را نتیجـه می‌دهـد. همچنیـن، تسـاوی $b^2=a^2+c^2-ac$ به همراه قضیهٔ کسـینوس‌ها نتیجه می‌دهـد: $\cos B=\frac{1}{2}$. بنابراین $\angle ABC=60^\circ$.

۴۵. رقم یکان عدد $S=1^1+2^2+3^3+...+2011^{2011}$ را بیابید.

● **حل:** بدیهی است که اگر r رقم یکان a باشد، رقم یکان a^n با رقم یکان r^n برابر اسـت، بنابراین رقم یکان 1^1 و 11^{11} و 21^{21} و ... و 2011^{2011} همگـی برابر ۱ می‌باشـد. همچنین رقـم یـکان 10^{10} و 20^{20} و ... و 2010^{2010} همگـی صفر می‌باشـد. رقم یـکان 2^2 و 12^{12} و 22^{22} و ... و 2002^{2002} نیز با رقم‌های یکان 2^2 و 2^{12} و 2^{22} و 2^{32} و ... و 2^{2002} برابر است. همچنین می‌دانیم رقم‌های یکان توان‌های ۲ به‌صورت تناوبی با دورهٔ تناوب ۴ بین ۲ و ۴ و ۸ و ۶ نوسان می‌کنند. پس رقم‌های یکان عددهای 2^{4k} و 2^{4k+1} و 2^{4k+2} و 2^{4k+3} به‌ترتیب ۶ و ۲ و ۴ و ۸ می‌باشد. بنابراین رقم‌های یکان 2^2 و 2^{12} و 2^{22} و ... و 2^{2002} به‌ترتیب مسـاوی ۴ و ۶ و ۴ و ۶ و ... و ۴ اسـت. با اسـتدلالی مشابه، رقم‌های یکان 3^3 و 13^{13} و 23^{23} و ... 2003^{2003} به‌ترتیـب ۷ و ۳ و ۷ و ۳ و ... و ۷ و رقم‌هـای یکان 4^4 و 14^{14} و 24^{24} و ... و 2004^{2004}، همگی مساوی ۶ می‌باشد. و رقم‌های یکان تمام توان‌های ۵ و ۶ نیز مساوی ۵ و ۶ هستند. رقم‌های یکان 7^7 و 17^{17} و 27^{27} و ... و 2007^{2007} نیز به‌ترتیب برابر ۳ و ۷ و ۳ و ... و ۳ و رقم‌های یکان 8^8 و 18^{18} و 28^{28} و ... و 2008^{2008} به‌ترتیب ۶ و ۴ و ۶ و ... و ۶ و رقم‌های یکان

$۹^{۹}$ و $۹^{۱۹}$ و... و $۹^{۲۰۰۹}$ نیز همگی مساوی ۹ است. به این ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
&۱^{۱}+۲^{۲}+۳^{۳}+...+۲۰۱۱^{۲۰۱۱}\overset{۱۰}{\equiv}(۱+۱+...+۱)\\
&+(۴+۶+۴+۶+...+۴)+(۷+۳+...+۷)\\
&+(۶+۶+...+۶)+(۵+۵+...+۵)+(۶+۶+...+۶)\\
&+(۳+۷+۳+...+۳)+(۶+۴+۶+...+۶)\\
&+(۹+۹+...+۹)=۲۰۲+(۱۰۰\times۶+۱۰۱\times۴)\\
&+(۱۰۰\times۳+۱۰۱\times۷)+(۲۰۱\times۶)+(۲۰۱\times۵)\\
&+(۲۰۱\times۶)+(۱۰۰\times۷+۱۰۱\times۳)+(۱۰۰\times۴+۱۰۱\times۶)\\
&+۲۰۱\times۹=۹۴۴۸
\end{aligned}$$

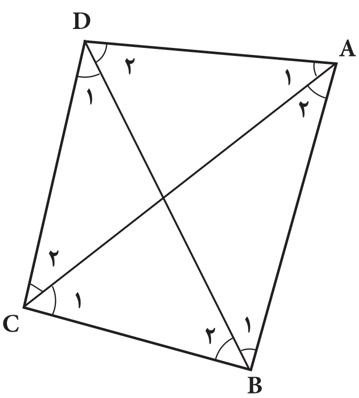
و لذا رقم یکان مساوی ۸ است.

۴۶. همهٔ اعداد طبیعی n را بیابید، به‌طوری که $۱+۲^{۲}+۳^{۳}+۴^{n}$ مربع کامل باشد.

حل: باید معادلهٔ $۳۲+۲^{۲n}=m^{۲}$ را در مجموعهٔ اعداد طبیعی حل کنیم. با تبدیل معادله به شکل $(m-۲^{n})(m+۲^{n})=۳۲$، می‌توان نتیجه گرفت برای $m-۲^{n}$ تنها مقادیر ۲ و ۴ قابل قبول‌اند. در حالت اول $m+۲^{n}=۱۶$ و در حالت دوم $m+۲^{n}=۸$ خواهد شد. با حل این دو دستگاه به جواب $m=۶$ و $n=۱$ می‌رسیم. بنابراین، برای n تنها یک مقدار مطلوب وجود دارد.

۴۷. در چهارضلعی ABCD، داریم: $|AD|=|BD|=|CD|$ و $\angle ADB=\angle DCA=\angle BAC$. مطلوب است اندازهٔ زوایای چهارضلعی.

حل: با نام‌گذاری زوایا به‌صورت زیر، از تساوی‌های داده شده داریم: $D_{۲}=C_{۲}=A_{۲}$ و: $C_{۱}+C_{۲}=B_{۲}$، $A_{۱}+A_{۲}=B_{۱}$ و $C_{۲}=A_{۱}$.



در نتیجه، با فرض $A_{۱}=x$ خواهیم داشت: $C_{۱}+B_{۲}=A_{۱}+D_{۲}$ و $B_{۱}=۲x$ و $C_{۲}=x=D_{۲}=A_{۲}$ از $C_{۱}+B_{۲}=۲x$ و $B_{۲}-C_{۱}=x$ خواهیم داشت: $B_{۲}=\frac{۳x}{۲}$ و $C_{۱}=\frac{x}{۲}$، در نتیجه در مثلث ABC داریم: $C_{۱}+B+A_{۲}=۱۸۰\Rightarrow ۵x=۱۸۰$. بنابراین $x=۳۶^{\circ}$ که از روی آن همهٔ زوایای چهارضلعی به‌دست می‌آیند.

۴۸. دو قطر ذوزنقهٔ ABCD با دو قاعدهٔ AB و CD، یکدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند. ثابت کنید مجموع مساحت دو مثلث PAB و PCD از مجموع مساحت دو مثلث PBC و PDA بیشتر است.

حل: فرض کنید: $AB\le CD$. از نقطهٔ P دو عمود $PH_{۱}$ و $PH_{۲}$ را بر AB و CD وارد کنید. دو مثلث $PH_{۱}A$ و $PH_{۲}C$ با هم و دو مثلث $PH_{۱}B$ و $PH_{۲}D$ با هم متشابه هستند. در نتیجه: $\frac{AH_{۱}}{H_{۲}C}=\frac{BH_{۱}}{DH_{۲}}=\frac{PH_{۱}}{PH_{۲}}$.

بنابراین: $\frac{PH_{۱}}{PH_{۲}}=\frac{AB}{DC}$. پس: $PH_{۱}\le PH_{۲}$. در نتیجه:

$$\begin{aligned}
&(DC-AB)(PH_{۲}-PH_{۱})\ge ۰\\
&\Rightarrow DC.PH_{۲}+AB.PH_{۲}\ge DC.PH_{۱}+AB.PH_{۲}\\
&\Rightarrow DC.H_{۱}H_{۲}+AB.H_{۱}H_{۲}\le ۲(DC.PH_{۲}+AB.PH_{۱})\\
&\Rightarrow ۲S(ABCD)\le ۴(S(PAB)+S(PCD))\Rightarrow \text{حکم}
\end{aligned}$$

۴۹. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$۲۰۱۰<\frac{۲^{۲}+۱}{۲^{۲}-۱}+\frac{۳^{۲}+۱}{۳^{۲}-۱}+...+\frac{۲۰۱۰^{۲}+۱}{۲۰۱۰^{۲}-۱}<۲۰۱۰+\frac{۱}{۲}$$

حل: با توجه به تساوی $\frac{n^{۲}+۱}{n^{۲}-۱}=۱+\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n+۱}$ برای هر عدد طبیعی $n\ge۲$، مجموع داده شده برابر خواهد شد با:

$$\begin{aligned}
A&=(۱+\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۳})+(۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴})+(۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵})+...\\
&+(۱+\frac{۱}{۲۰۰۹}-\frac{۱}{۲۰۱۱})=۲۰۰۹+۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲۰۱۰}\\
&-\frac{۱}{۲۰۱۱}=۲۰۱۰+\frac{۱}{۲}-\frac{۴۰۲۱}{۲۰۱۰\times۲۰۱۱}
\end{aligned}$$

که حکم را به‌راحتی نتیجه می‌دهد.

۵۰. یک ۱۳۹۲- ضلعی به تعدادی مثلث افراز شده است. حداقل تعداد مثلث‌ها را بیابید.

حل: فرض کنید ۱۳۹۲-ضلعی به k مثلث افراز شده باشد. مجموع زوایای این مثلث‌ها با مجموع زوایای ۱۳۹۲-ضلعی برابر است (چون افراز داریم). در نتیجه اگر t رأس از مثلث‌ها داخل چندضلعی باشند، داریم:

$k*۱۸۰=(۱۳۹۲-۲)*۱۸۰+t*۳۶۰\Rightarrow k=۱۳۹۰+۲t$

بنابراین کمترین مقدار k زمانی است که $t=۰$ و $k=۱۳۹۰$. یک مثلث‌بندی با ۱۳۹۰ مثلث می‌تواند این‌گونه ساخته شود که یک رأس چندضلعی را به همهٔ رئوس دیگر وصل کنیم.

* iradmusa@yahoo.com